משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 8 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית
$\left(p(x)y'(x)\right)'+\left(\lambda r(x)-q(x)\right)y(x)=0$.

א. $y''-2xy'+\lambda y=0$ (משוואת הרמיט)

ב. $x^2y''+xy'+(x^2-\lambda)y=0$ (משוואת בסל)

2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y''+e^{2x}y'+\lambda y=0 \quad , \quad 0<x<1 \\ y(0)+4y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y''+4y'+xy+\lambda e^x y=0 \quad , \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות **4-7**:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

4)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<\pi \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y(\pi)-y'(\pi)=0 \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$$

8) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} y''-2y'+\left(1+\lambda\right)y=0, & 0<x<1 \\ y\left(0\right)=0 \\ y\left(1\right)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. פתרו את הבעיה.

9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \; 0<x<\ell \\ y(0)=0 \\ y'(\ell)=0 \end{cases}$.

ב. נציב $\ell=1$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \; 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$.

1. פתחו את הפונקציה $f(x)=1 \, , \, 0\le x\le 1$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו. התחל את הטור מ- $n=1$.
2. מה סכום הטור ב- $x=0$? האם הוא שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$?

ג. נציב $\ell=2$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \; 0<x<2 \\ y(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases}$.

פתחו את הפונקציה $f(x)=x \, , \, 0\le x\le 2$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \; 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}$.

ב. פתחו את הפונקציה $f(x)=e^x \, , 0\le x\le \pi$ לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א. התחילו את הטור מ- $n=1$.

11) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<e \\ y(1)=0 \\ y'(e)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.
ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.
ד. פתחו את $f(x)=\begin{cases} 1 & 1\le x\le\sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e}\le x\le e \end{cases}$, לטור פונקציות עצמיות.
הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.
ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x=2$, $x=1.5$, $x=\sqrt{e}$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi n)=(-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi n)=0$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

תשובות סופיות

1) א. $\left(e^{-x^2}y'\right)'+\left(\lambda e^{-x^2}-0\right)y=0$ ב. $(xy')'+\left(\lambda\left(-\frac{1}{x}\right)-(-x)\right)y=0$

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$, $\varphi_n(x)=\cos(n\pi x)$,
ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

5) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$ $\phi_n(x)=n\cos nx+\sin nx$,
ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$, $\lambda_n=n^2$; בנוסף, $\lambda=-1$ הוא ע״ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=e^x$.

6) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$, $\varphi_n(x)=\sin(\omega_n x)$,
ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2$.

7) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$ $y_n(x)=\sin(\omega_n x)-\omega_n\cos(\omega_n x)$,
ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2$.
בנוסף, $\lambda_0=0$ הוא ע״ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=x-1$.

8) א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$, $\varphi_n(x)=e^x\sin n\pi x$.
ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

9) א. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,...$ $\varphi_n(x)\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right)$.
ערכים עצמיים: $n=0,1,2,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2$.
ב. סכום הטור ב- $x=0$ הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$.
ג. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right)$, כאשר $(0<x<2)$.

10) א. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,...$ $\varphi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2}x$.
ערכים עצמיים: $n=0,1,2,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$.
ב. $e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n+1}-1}{1^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$, כאשר $0<x<\pi$.

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,\ldots$ $\varphi_n(x)=\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\ln x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,\ldots$ $\lambda_n=\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$.

ג. שאלת הוכחה.

ד. $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-2\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\ln x\right)$$.

ה. סכום הטור ב- $x=\sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x=1.5$ הוא 1 ; וב- $x=2$ הוא 0.